

# Le retournement de la sphère

*Grâce à quatorze modifications géométriques simples, on peut retourner une sphère sans la déchirer ni la plier, c'est-à-dire amener à l'extérieur sa face interne.*

par Bernard Morin et Jean-Pierre Petit

En 1957, Stephen Smale, un jeune mathématicien devenu célèbre depuis, présentait à son directeur de recherches, Raoul Bott, un résultat de caractère très général sur les déformations de sphères. Au premier examen, Raoul Bott refusa d'admettre le théorème. Plus sensible que son étudiant aux conséquences géométriques des énoncés abstraits, il ne fut pas long à remarquer que si Stephen Smale avait raison, il serait possible, en suivant des règles que nous expliquons plus loin, de retourner la sphère ordinaire de façon à lui faire présenter sa face interne vers l'extérieur, et cela, sans quitter l'espace tridimensionnel de la géométrie classique. A coup sûr, il y avait là de quoi surprendre : le théorème de Whitney-Graustein, d'ailleurs redémontré par Stephen Smale, affirme qu'on ne peut, en suivant les mêmes règles, retourner un cercle sans sortir du plan. Rappelons qu'en effet le cercle, appelé sphère de dimension 1 par les mathématiciens, joue pour le plan le même rôle que la sphère pour l'espace ordinaire. Mais surtout, si Stephen Smale avait raison, on devait être capable de concrétiser le retournement à l'aide de modèles puisque l'affaire se jouait dans notre espace, où l'imagination peut s'exercer. Or, si la démonstration du théorème fournissait un moyen théorique de réaliser la transformation, il était en pratique impossible d'imaginer cette solution. Le travail de Stephen Smale, très solide et très clair, était facile à contrôler; aussi, la communauté mathématique reconnut rapidement que son théorème était vrai. Restait pourtant l'irritant défi lancé par Raoul Bott : « Montre-moi comment cela est possible. » En vrai spécialiste de la géométrie des dimensions supérieures à trois, Stephen Smale ne se soucia guère de satisfaire la curiosité de son patron.

Après avoir précisé les termes dans lesquels se pose le problème, nous nous proposons de raconter ici les efforts d'imagination spatiale de ceux, mathématiciens et physiciens, qui depuis une vingtaine d'années ont tenté de répondre à la question posée par Raoul Bott. Chemin faisant, nous exposerons le scénario qui, selon nous, réalise le programme de la façon la plus satisfaisante.

Tous les détails de notre solution sont consignés sur les nombreuses figures étayant un texte qui ne pourrait être rendu intelligible sans le secours du dessinateur. Notre méthode présente, entre autres avantages, celui de se généraliser à l'étude des déformations d'une surface quelconque, comme nous le verrons en particulier à propos du tore.

## *Plongements et déformations de plongements.*

Pour nous initier à l'étude des déformations de la sphère, nous devons d'abord préciser les règles du jeu auquel nous sommes conviés, en nous familiarisant avec les transformations permises et en prenant conscience de ce qui est interdit. En premier lieu, il convient d'aborder la notion de plongement. Pour cela, représentons la sphère comme un ballon dont la baudruche se laisse étirer et contracter à volonté. Lorsqu'on envisagera de déformer ce ballon, il faudra s'interdire d'en déchirer la membrane. Ainsi, pour réaliser le retournement, il n'est pas question de pratiquer dans la surface une ouverture, si petite soit-elle, qui permettrait de retourner la sphère à la manière d'une peau de lapin, ou mieux, d'une vessie de ballon, quitte ensuite à obturer l'orifice. En effet, toute déchirure constitue une rupture de continuité. Or les ruptures sont interdites, car, pour le topologue, la sphère trouée en un point perd sa qualité de sphère pour devenir un disque. Il faut également éviter de plier la membrane, ce qui, le long du pli, aurait pour résultat de casser le plan tangent qui doit être bien défini en chacun des points du ballon et varier continûment en fonction de la position du point. Pour qu'une configuration de la membrane qui matérialise la sphère mérite le nom de plongement, il faut enfin interdire que deux points distincts de cette membrane soient en coïncidence. En résumé, un *plongement* de la sphère est l'un des états dans lesquels peut se trouver une membrane élastique qui n'est ni déchirée, ni pliée et qui n'entre jamais en contact avec elle-même : la surface ainsi déterminée possède en chacun de ses points un plan tangent dont la position doit, en outre, dépendre continûment du

point. Le plus simple de tous est le plongement standard; c'est celui que Monsieur de La Palice aurait pu inventer : il consiste à laisser la sphère (lieu des points dont la distance à l'origine de l'espace est égale à un) dans l'état où sa définition nous la livre.

Grâce à la substance idéale dont il est fait, le ballon pourra, à notre fantaisie, se déformer de multiples façons : il sera possible par exemple de lui faire prendre la forme d'une saucisse ou d'une galette, de lui faire pousser de longues cornes vers l'extérieur mais aussi vers l'intérieur, de ramifier ces cornes à la façon des bois d'un cerf, d'enlacer entre elles les diverses ramures ainsi obtenues pour en faire des torsades ou même des tresses, de gonfler les bourgeons terminaux de ce fouillis de lianes en d'énormes globes et ainsi de suite. Une *déformation de plongement* est une manipulation imprimée à la baudruche pour la faire passer d'une configuration donnée à une autre : elle a donc lieu durant un certain laps de temps à chaque instant duquel correspond une configuration de plongement représentant l'une des phases du processus évolutif qui conduit du plongement de départ au plongement d'arrivée. Au cours de la déformation, chaque point de la baudruche décrit une trajectoire continue et le plan tangent à la surface en ce point se déplace lui aussi continûment en fonction du point et du temps.

Il ne faudrait pas croire que deux plongements quelconques de la sphère puissent toujours être reliés l'un à l'autre par une déformation de plongement. Imaginons, en effet, que la baudruche de notre ballon soit colorisée en gris sur l'une de ses faces et en orangé sur l'autre. Si nous ne précisons rien au fabricant qui nous fournit les échantillons sur lesquels nous expérimentons, celui-ci nous livrera des ballons qui nous apparaîtront de l'extérieur tantôt gris et tantôt orangés. Les ballons orangés, au même titre que les gris, représentent des plongements de la sphère. Convenons une fois pour toutes que le plongement standard est vu de l'extérieur comme un objet gris. Alors l'exemple le plus naturel d'un plongement d'extérieur rouge est le *plongement antipodal*. Pour le construire, assimilons la sphère stan-

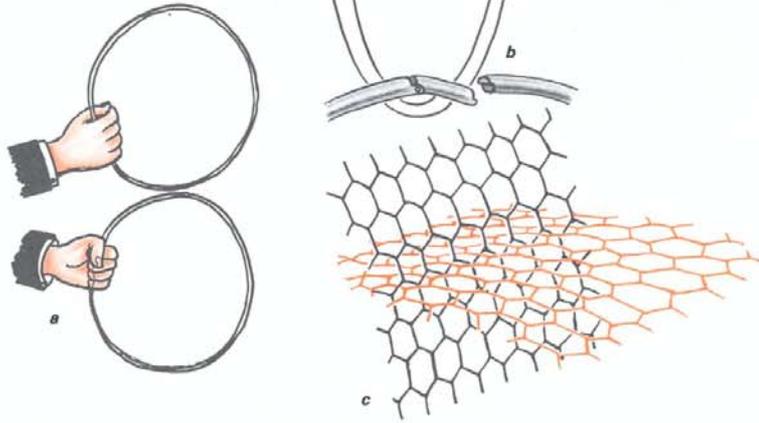
lard à une mappemonde, puis fabriquons à sa place une nouvelle mappemonde sur laquelle chaque point de la première vient s'inscrire sur le point diamétralement opposé. Le plongement antipodal s'obtient en faisant subir à la sphère standard une rotation de  $180^\circ$  autour de l'axe des pôles, puis une symétrie par rapport au plan équatorial. La symétrie échange les hémisphères entre eux sans déplacer les points de l'équateur. En observant du dessus le résultat de ces opérations, on aperçoit donc la face, naguère intérieure, de l'hémisphère sud. Or, aucune des manipulations décrites plus haut, si compliquées soient-elles, ne pourra faire que l'extérieur d'un ballon, gris au départ, devienne orangé à l'arrivée. En effet, l'air contenu à l'intérieur du ballon y reste emprisonné au cours de toute déformation de plongements. Un voyageur enfermé dans cette capsule élastique se verra constamment environné d'orangé, quelles que soient les manipulations subies par l'enveloppe d'où, quoi qu'il arrive, il ne pourra s'échapper sinon en acquérant des dons de passe-muraille.

Au terme de cette étude sur les déformations de plongements, nous sommes en état de comprendre et d'accepter le théorème suivant : tout plongement de la sphère peut être relié par une déformation de plongement, soit au plongement standard, soit au plongement antipodal selon qu'il présente à l'extérieur sa face grise ou sa face orangée, mais il n'existe pas de déformation de plongement reliant le plongement standard au plongement antipodal. Le royaume des plongements se compose donc de deux îlots. Le premier, l'îlot gris, contient le plongement standard, tandis que l'autre, l'orangé, contient le plongement antipodal. Sur chaque îlot, on peut se rendre à volonté d'un point à un autre en empruntant des chemins qui sont les déformations de plongements, mais il n'existe pas de pont reliant le pays gris au pays orangé.

Naturellement, les notions de plongement et de déformation de plongements s'étendent à d'autres surfaces que la sphère. A la fin de cet article, nous évoquerons brièvement la question des plongements du tore. La surface de Boy et la bouteille de Klein que nous rencontrerons plus loin ne peuvent être plongées dans l'espace ordinaire car ce sont des surfaces unilatères sans bord.

### *Immersion et homotopies régulières.*

Retourner la sphère consiste à construire une déformation reliant la sphère standard à son plongement antipodal, c'est-à-dire amenant une sphère d'extérieur gris à présenter sa face orangée à l'extérieur. Or, comme nous venons de le voir, il est impossible qu'une déformation réalisant ce programme soit une déformation de plongements. Force est donc, pour atteindre le but fixé, de recourir à une catégorie plus large



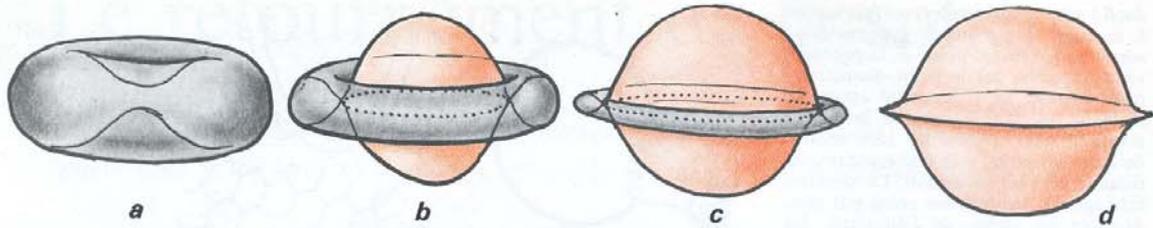
**1. UNE SURFACE IMMERGÉE est une surface dont différentes parties se traversent. Les anneaux magiques des prestidigitateurs (a) comportent généralement un anneau spécial muni d'un mousqueton (b) ce qui permet à deux anneaux de s'interpénétrer. Deux surfaces qui s'interpénètrent peuvent se concevoir comme deux grillages à mailles extrêmement petites (c), chaque segment de grillage étant muni d'un système de mousquetons semblable à celui des anneaux magiques.**

de déformations, les déformations d'immersions, au cours desquelles il est permis aux points de la surface de se rencontrer. Pour expliquer ce dont il s'agit, l'image de la baudruche n'est plus un support suffisant pour l'intuition. Sur la figure 1a, on a représenté les anneaux truqués dont se servent les illusionnistes. Un système de mousquetons permet à l'opérateur de les faire se traverser et donc de les enlacer ou de les séparer à volonté. Imaginons maintenant un grillage très fin dont les mailles soient de tels anneaux et assimilons une surface à un grillage de ce type. Grâce à ce dispositif, on peut imaginer ce qu'est une surface qui se recoupe elle-même (voir figure 1c) et comprendre comment les nappes de la surface peuvent se traverser, puis glisser librement les unes par rapport aux autres. Comme dans le cas des plongements, on s'interdit évidemment de déchirer ou de plier la surface, ce qui endommagerait les mailles du grillage, mais on suppose que celui-ci a les mêmes propriétés d'élasticité que la baudruche d'un plongement. Toute présentation d'une surface selon une configuration dans laquelle cette surface est autorisée à se toucher ainsi qu'à se traverser s'appelle une *immersion* de la surface, pourvu qu'en chacun de ses points elle admette un plan tangent variant continûment en fonction du point. Une déformation de la surface au cours de laquelle on s'autorise des contacts et des traversées s'appelle une *déformation d'immersion* ou *homotopie régulière*, à condition, ici encore, que soient respectées les contraintes de continuité qui ont été imposées au plan tangent lors d'une déformation de plongement. A chaque instant de l'intervalle de temps qui

paramètre la déformation correspond une immersion de la surface. Ainsi, une homotopie régulière nous conduit-elle graduellement de l'immersion initiale vers l'immersion qu'on désire atteindre sans sortir à aucun moment du cadre des immersions. Remarquons que les déformations de plongement étudiées précédemment sont des homotopies régulières d'un type particulier.

Si le théorème de Stephen Smale avait tant surpris Raoul Bott, c'était que, lorsqu'on l'applique à l'espace de dimension trois et à la sphère ordinaire, ce théorème affirme qu'on peut passer du plongement standard à n'importe quelle immersion de la sphère par une déformation d'immersions. Le plongement antipodal qui, comme tout plongement, est une immersion, peut donc, lui aussi, être relié au plongement standard par un chemin d'immersions. Les îlots gris et orangés sur lesquels se répartissent les plongements nous apparaissent maintenant comme deux petits pays au sein de la contrée des immersions qui est un vaste continent d'un seul tenant. Ce que demandait Raoul Bott était qu'on lui trace à travers la forêt d'immersions séparant ces deux pays un chemin aussi droit que possible permettant de se rendre commodément de l'un à l'autre.

Le recours aux immersions ne doit pas nous laisser croire que le problème est maintenant facile à résoudre. Voici un exemple significatif des erreurs qu'on peut commettre en abusant de la notion d'immersion : partant de la sphère standard, poussons le pôle nord et le pôle sud l'un vers l'autre, le long de l'axe qui les joint (voir figure 2). Au moment où les pôles entrent en contact, on sort du domaine des plongements, mais dans le contexte des immersions,



2. UNE MAUVAISE SOLUTION au retournement de la sphère consiste à pousser (a) sur deux points diamétralement opposés de la sphère pour faire en sorte qu'il se forme (b) une « lentille » centrale

sortie d'un tube. Cette opération est permise mais il est interdit, selon les règles de l'homotopie régulière, de poursuivre l'opération qui conduirait à une dégénérescence du tube en arête de rebroussement (d).

on peut poursuivre la déformation amorcée et croiser les points en mouvement. On voit alors apparaître au centre de la figure une lentille orangée raccordée le long d'une ligne de points doubles à un tube équatorial resté gris : le pôle sud est maintenant sur la face supérieure de la lentille et le pôle nord sur sa face inférieure. Plus la déformation s'accroît, plus la lentille s'agrandit au détriment du tube qui, si nous laissons évoluer les choses, finira par disparaître totalement. La sphère est alors retournée, mais à l'instant où le tube s'évanouit, apparaît sur l'équateur une arête de rebroussement. De telles configurations ne sont pas des immersions et sont à proscrire car, comme dans le cas du pli, l'apparition d'une arête de rebroussement bouleverse la structure et introduit une discontinuité dans l'évolution des plans tangents.

Ce que ni Stephen Smale ni Raoul Bott ne parvenaient à imaginer était qu'on puisse contourner la difficulté précédente sans sortir du cadre des immersions. Les mathématiciens qui se sont intéressés au problème ont alors pris conscience du fait que, dans le passé, leur imagination n'avait guère eu l'occasion de s'exercer sur les déformations d'immersions. « Si Bourbaki s'était douté que les immersions pouvaient être aussi compliquées, nous confiais l'un de ses plus proches collaborateurs en regardant nos modèles du retournement, il n'aurait jamais appelé cela des immersions; nous considérions qu'une immersion était, à peu de choses près, un plongement ». En général, lorsqu'une immersion n'est pas un plongement, elle ne détermine pas seulement un intérieur et un extérieur car elle se présente à nous comme un objet comportant un système de cloisons souvent compliqué, délimitant de multiples régions enchevêtrées les unes dans les autres. L'immersion de la sphère qu'on vient d'examiner découpe l'espace en trois régions : l'extérieur, l'intérieur du tube et l'intérieur de la lentille. Pour appréhender un objet cloisonné, la difficulté n'est pas de nature mathématique mais psychologique. En effet, lorsqu'on se représente mentalement une structure spatiale, il est impossible de ne pas se situer en un point particulier de l'espace imaginé. Or, pour bien maîtriser la disposition

d'un cloisonnement, il faut pouvoir se placer simultanément, par la pensée, dans chacune des régions que découpe l'objet. Cette faculté d'ubiquité imaginative que doit acquérir le jeune architecte, lui permettra de prévoir toutes les incidences du déplacement d'un mur ou de l'élévation d'un plancher. En plus de la difficulté à imaginer, il y avait la difficulté à transmettre. Comment, en effet, décrire de tels objets sinon en construisant des maquettes si possible démontables, activité à laquelle les mathématiciens ont peu coutume de s'adonner? Faute d'avoir eu recours à ce moyen, un topologue a souvent cru comprendre la solution d'un collègue, alors qu'en l'écouter, il était en train d'en inventer une nouvelle.

#### Le recours à la surface de Boy.

En 1961, Arnold Shapiro, géomètre fort ingénieux et très original, prématurément décédé, imagina un scénario précis détaillant le retournement de la sphère. Bien peu nombreux sont ceux qui connaissent aujourd'hui la solution qu'il proposait, car, ne disposant pas d'un formalisme adéquat, l'auteur considéra qu'il ne pouvait mettre son travail sous forme publiable. Pourtant, en une soirée, il a trouvé le moyen de nous communiquer de vive voix, comme sans doute à plusieurs autres, l'idée qu'il avait conçue. En 1966, Anthony Phillips publia une suite de dessins constituant ce qu'il croyait être la transformation d'Arnold Shapiro. En réalité, la déformation d'Anthony Phillips, inspirée par René Thom et voisine d'une solution de Nicolaas Kuiper dont il n'avait pas connaissance, n'a en commun avec celle d'Arnold Shapiro que d'aboutir au revêtement de la surface imaginée en 1901 par Werner Boy (un élève de Hilbert). L'idée mise en œuvre par ces auteurs est fort instructive et son examen va nous familiariser avec les transformations permises dans le contexte des immersions.

La surface de Boy (voir figure 4) est l'immersion d'un objet non orientable qu'on ne peut plonger dans l'espace ordinaire. Arnold Shapiro et Anthony Phillips ont, chacun de leur côté, construit une

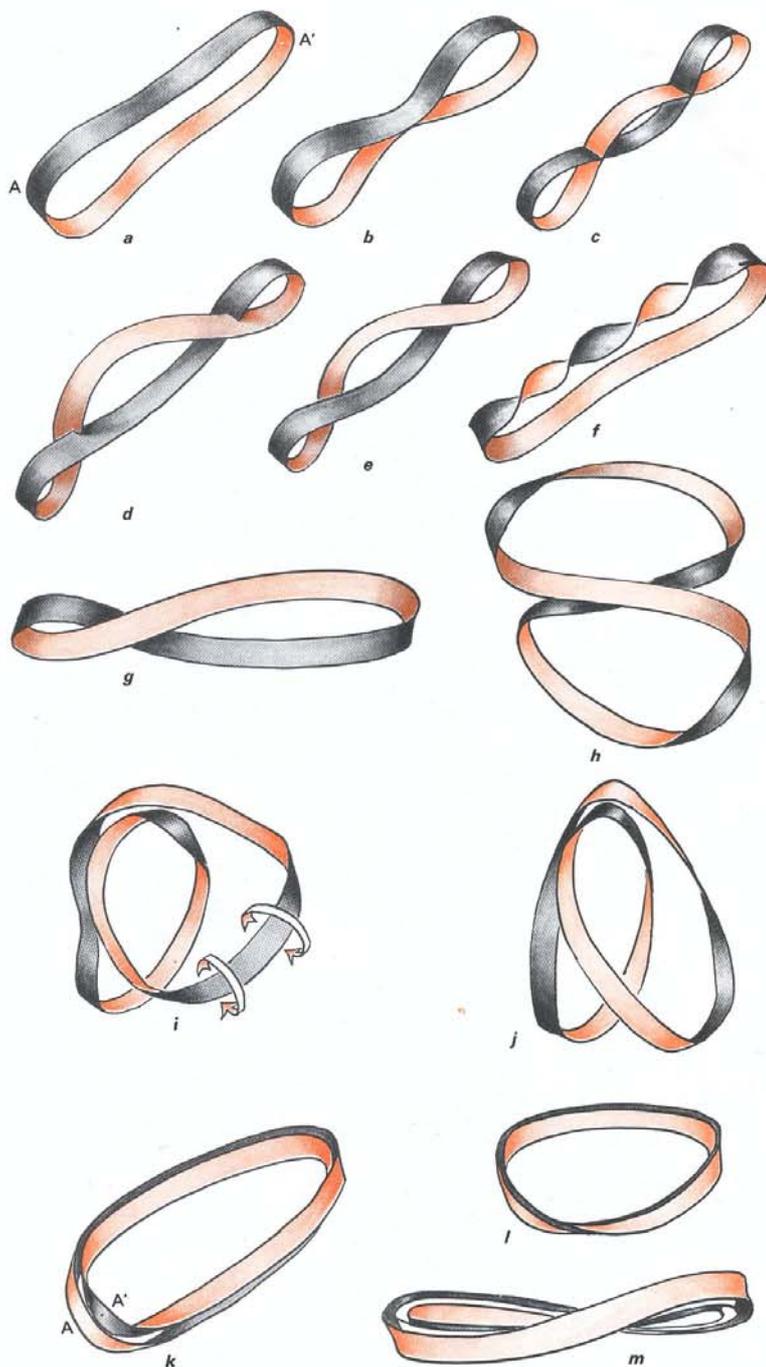
homotopie régulière amenant la sphère standard à envelopper (les mathématiciens disent *revêtir*) deux fois la surface de Boy. Lorsque la sphère parvient à l'état désiré, chacun de ses points est amené en regard du point antipodal, de manière que chaque élément de la surface de Boy se trouve pris en sandwich entre deux portions diamétralement opposées de son manteau sphérique. Pour réaliser le retournement de la sphère, il suffit d'obliger les deux feuillets du revêtement à se traverser l'un l'autre tout le long de l'immersion de Boy, pour ensuite parcourir en sens inverse l'homotopie régulière qui avait amené la sphère en position de revêtement. On aboutit en fin de compte au plongement antipodal puisque tout point de la sphère a croisé le point diamétralement opposé lors de son passage à travers l'immersion de Boy.

Pour mieux comprendre ce qu'est un revêtement à deux feuillets, commençons par construire celui d'une surface plus simple, le ruban de Möbius. Le ruban de Möbius est, tout comme la surface de Boy, une surface *unilatère*, c'est-à-dire à un seul côté. On peut matérialiser ce ruban en prenant une bande de papier environ dix fois plus longue que large dont on recolle les extrémités après lui avoir fait subir une torsion d'un demi-tour (voir figure 3). A chaque passage, une fourmi cheminant le long d'une telle bande se trouvera alternativement au-dessus puis au-dessous du ruban. Les termes « au-dessus » et « au-dessous » n'ont de signification que pour un observateur ne pouvant voir qu'une partie de la bande et ignorant son mode de raccordement; sur l'objet considéré dans son ensemble, ils perdent toute signification. Notons que le bord de la surface qui vient d'être construite est une courbe fermée, d'un seul tenant, c'est-à-dire qui se laisse déformer en un cercle.

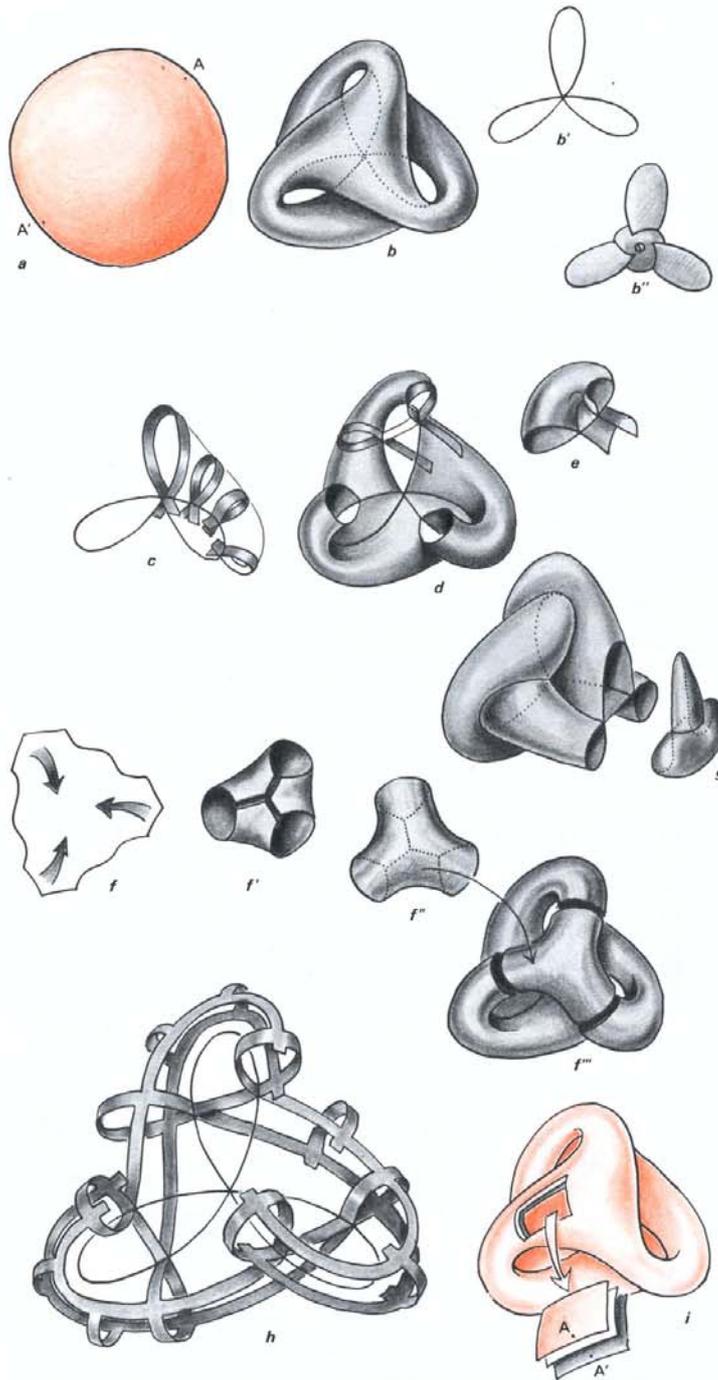
Considérons maintenant une autre bande refermée sur elle-même à la manière d'une ceinture (sans avoir été préalablement tordue), c'est-à-dire une bande cylindrique ou mieux la région équatoriale de la sphère standard. Nous nous proposons de montrer comment la bande se laisse déformer en un revêtement à deux feuillets du ruban de Möbius qui amène en regard les points diamétralement opposés de la région équatoriale.

Grâce à une homotopie régulière, on commence par croiser puis décroiser la bande. Le résultat de cette homotopie est une bande tordue deux fois que nous conseillons au lecteur de concrétiser au moyen d'une bande de papier, grise d'un côté et orangée de l'autre, deux fois plus longue que celle employée à la confection du ruban de Möbius. En effet, la manipulation qui conduit de la bande tordue deux fois au revêtement du ruban de Möbius, est une déformation de plongement qu'on pourra par conséquent faire subir à une représentation matérielle de cette bande en suivant les indications de la figure 3. Lorsque l'opération est menée à son terme, la bande est enroulée sur elle-même de telle sorte qu'un observateur pris entre les deux feuillettes de l'enroulement voit tous deux orangés. Il est possible d'insérer entre ces deux feuillettes un ruban de Möbius (représenté en blanc sur la figure 3) à condition toutefois de n'exécuter le recollement qui ferme le ruban qu'après avoir mis en place ce dernier. Ce faisant, on a matérialisé le revêtement à deux feuillettes du ruban de Möbius par une bande bilatère. Lorsque ce travail est exécuté, un observateur extérieur ne voit plus qu'une bande de Möbius grise. Pour imiter l'opération envisagée par Anthony Phillips, il faut maintenant sortir du cadre des déformations concrètement réalisables et, grâce à une déformation d'immersions, passer du revêtement gris au revêtement orangé en amenant les deux feuillettes à se croiser tout le long du ruban de Möbius, ce qui a pour effet de les permuter. Prises à rebours et appliquées au revêtement orangé, les manipulations qui avaient conduit au revêtement gris ramènent notre bande en position cylindrique mais, contrairement à la situation de départ, c'est maintenant la face orangée qui se trouve à l'extérieur.

Puisque l'immersion de Boy est unilatère, il est possible de délimiter une région de sa surface en forme de ruban de Möbius. Ce qui reste de la surface de Boy lorsqu'on a découpé le ruban peut se déformer par homotopie régulière en un disque plan ou encore en une calotte sphérique. La surface de Boy s'obtient donc en cousant ensemble un ruban de Möbius et un disque le long de son bord (qui dans les deux cas est un cercle). Naturellement, pour que le raccordement puisse s'effectuer, il faut permettre aux surfaces en jeu de se traverser. A notre bande cylindrique (assimilée à la région équatoriale de la sphère standard) ressoudons maintenant les deux calottes sphériques délibérément oubliées dans ce qui précède et dessinons sur la surface de Boy un ruban de Möbius. Il serait possible de construire une homotopie régulière déformant la sphère en un revêtement à deux feuillettes de la surface de Boy, dans laquelle la région équatoriale se transformerait en revêtement du ruban selon le scénario qui vient d'être décrit. Le terme de cette homotopie amènerait les deux calottes sphériques en coïncidence le long de la portion de sur-



3. UN REVÊTEMENT A DEUX FEUILLETS d'une surface, ici un ruban de Möbius, consiste à envelopper cette dernière par les deux feuillettes d'une autre surface, ici une ceinture tordue deux fois. Pour amener la ceinture (a) en position de revêtement, on la modifie en l'autorisant à se traverser (b, c) puis on la décroise symétriquement (d) pour obtenir une ceinture à double torsade (e, f). On répartit ensuite la torsion tout le long de la bande (g) pour transformer ensuite la surface comme indiqué en h, i, j. On obtient ainsi deux éléments de ruban de Möbius. Pour finir, la bande se trouve enroulée deux fois (k) de sorte que les faces en regard sont d'une même couleur. On peut alors insérer une bande et en coller les extrémités pour obtenir un ruban de Möbius (en blanc) qui est revêtu par les deux feuillettes de la ceinture (m). Les points tels que A et A' sont amenés en coïncidence.



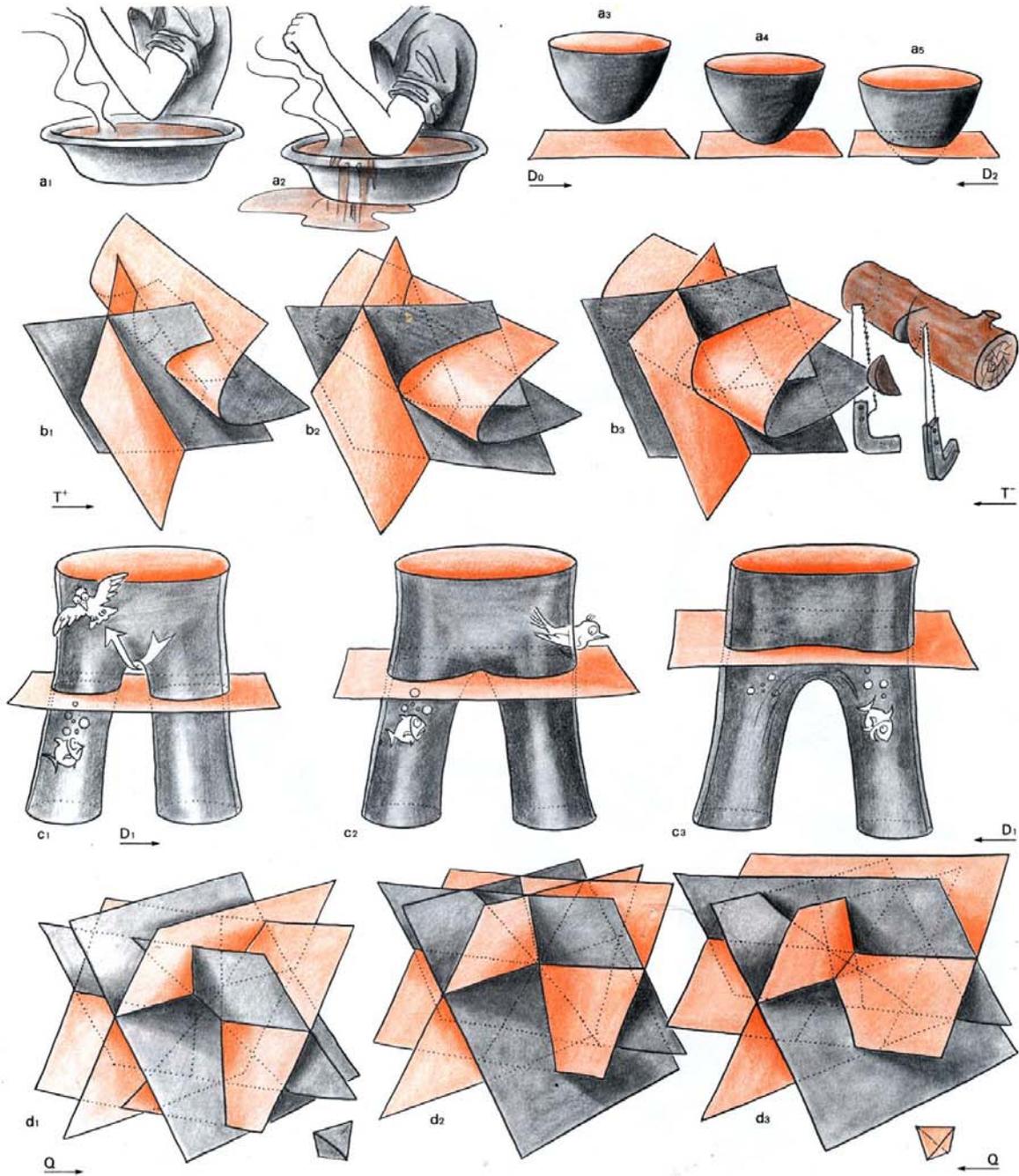
4. LA SURFACE DE BOY est le premier modèle central qui ait été utilisé pour retourner la sphère. La beauté intrinsèque de cette surface mérite une attention particulière. La courbe de self-intersection de la surface est une courbe gauche ayant la forme d'une hélice tripale. La surface elle-même est formée de trois tubes. Elle est ici représentée sous divers angles, parfois éclatée et parfois partiellement recouverte de bandelettes pour permettre au lecteur de mieux comprendre sa géométrie. La sphère (a) peut être immergée de façon à revêtir la surface de Boy par deux feuillettes en regard qu'on peut ensuite échanger, en vue de retourner la sphère. Dans cette immersion (i), chaque point de la sphère A est mis en coincidence avec le point antipodal A'.

face de Boy extérieure au ruban. Cette manière de procéder serait moins élégante que celle d'Anthony Phillips et encore moins élégante que celle de Shapiro, mais la déformation de la région équatoriale qui vient d'être présentée méritait d'être étudiée pour elle-même en raison de sa grande simplicité.

#### Le modèle central de notre déformation

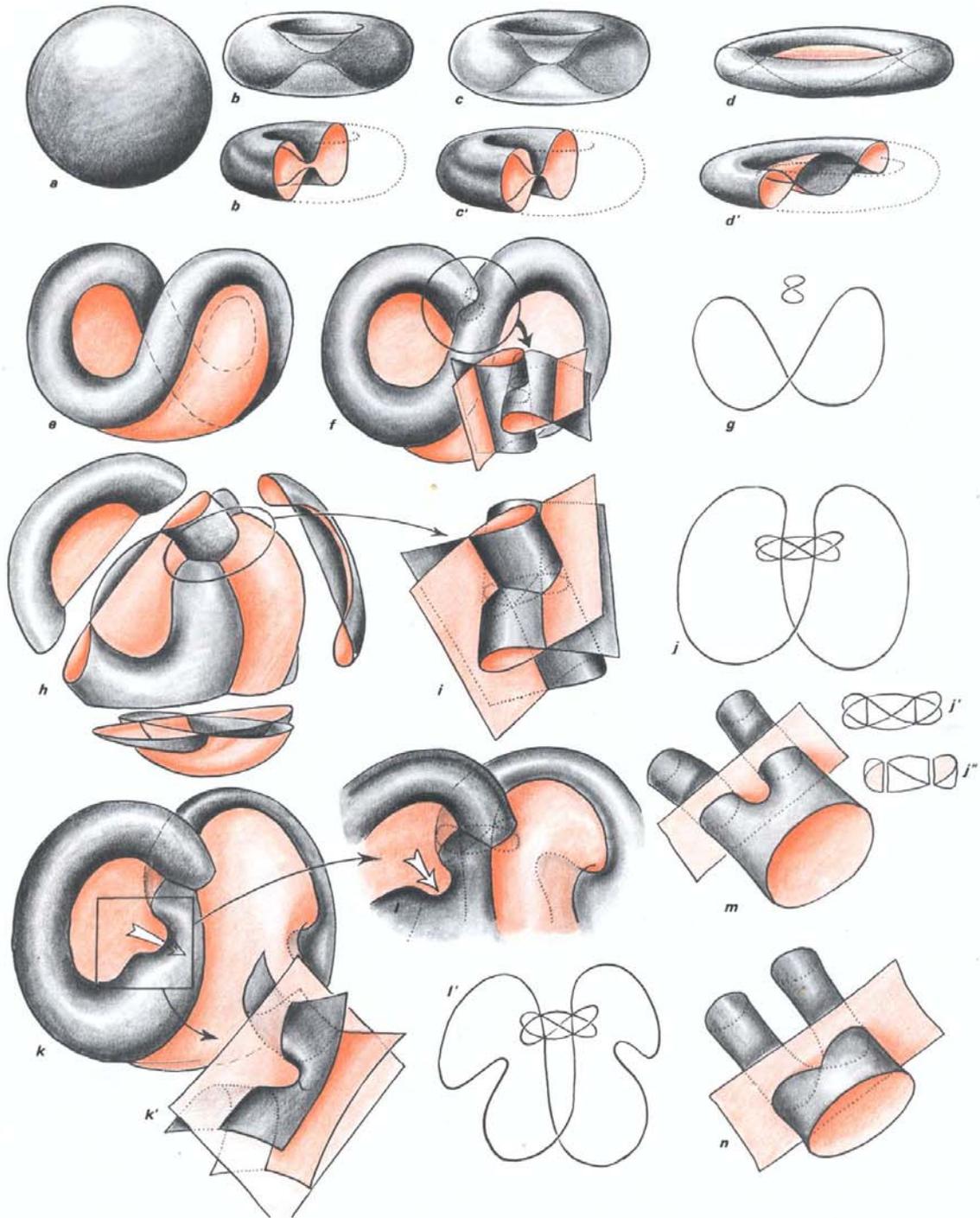
Bien que très ingénieux, les dessins publiés par Anthony Phillips sont d'un déchiffrement ardu. En effet, ils montrent seulement une partie des objets à décrire, obligeant le lecteur à reconstituer mentalement ces derniers. Les lacunes volontaires des illustrations étaient inévitables en raison de la complexité des modèles envisagés. L'effort demandé au lecteur n'a pourtant pas rebuté le physicien Marcel Froissart. En analysant la solution proposée, il a constaté qu'il pouvait réaliser le projet de manière plus simple à condition d'oublier la surface de Boy. « Ce que Anthony Phillips fait avec six tubes, on peut le faire avec quatre » disait-il. La surface de Boy se présente comme un agencement de trois tubes. Son revêtement par la sphère comporte donc six tubes. Considérons maintenant l'immersion de la sphère représentée sur la figure 5. Ce modèle, qui met en évidence les quatre tubes aperçus par Marcel Froissart, est plus simple que le revêtement à deux feuillettes de l'immersion de Boy. Ses propriétés de symétrie lui permettent, comme à la surface de Boy, de servir d'étape centrale au retournement de la sphère. Du point de vue de sa forme, il possède un axe de symétrie quadruple mais si l'on fait tourner l'objet d'un quart de tour, on échange les couleurs des 4 tubes qui sont alternativement gris et orangés. Si donc on dispose d'une famille d'immersions permettant de passer de la sphère standard à ce modèle central, il suffit, après cette rotation de  $90^\circ$ , d'opérer la transformation en sens inverse pour aboutir à la sphère retournée. Chose curieuse, et c'est un des paradoxes posés par l'imagination spatiale, Marcel Froissart n'avait pas vu ce modèle central et la transformation qu'il proposait n'était pas symétrique dans le temps, comme le sont celles d'Anthony Phillips, et celle qui sera présentée plus loin.

En 1967, lors de la rencontre du Batelle Memorial Institute, qui eut lieu à Seattle, entre mathématiciens et physiciens, fort curieux de connaître l'intéressante découverte de Marcel Froissart, nous nous sommes heurtés à un problème de communication redoutable. Pour converser avec l'inventeur, la seule méthode praticable fut de le questionner à l'aide de modèles en pâte à modeler et en fil de fer. Il se piqua au jeu et se mit lui aussi à pétrir la glaise afin de répondre aux questions. Ce dialogue insolite prit fin le jour où nous fûmes en état de lui présenter une ébauche du modèle central : il devenait alors clair pour les interlocuteurs qu'on pouvait rendre la défor-



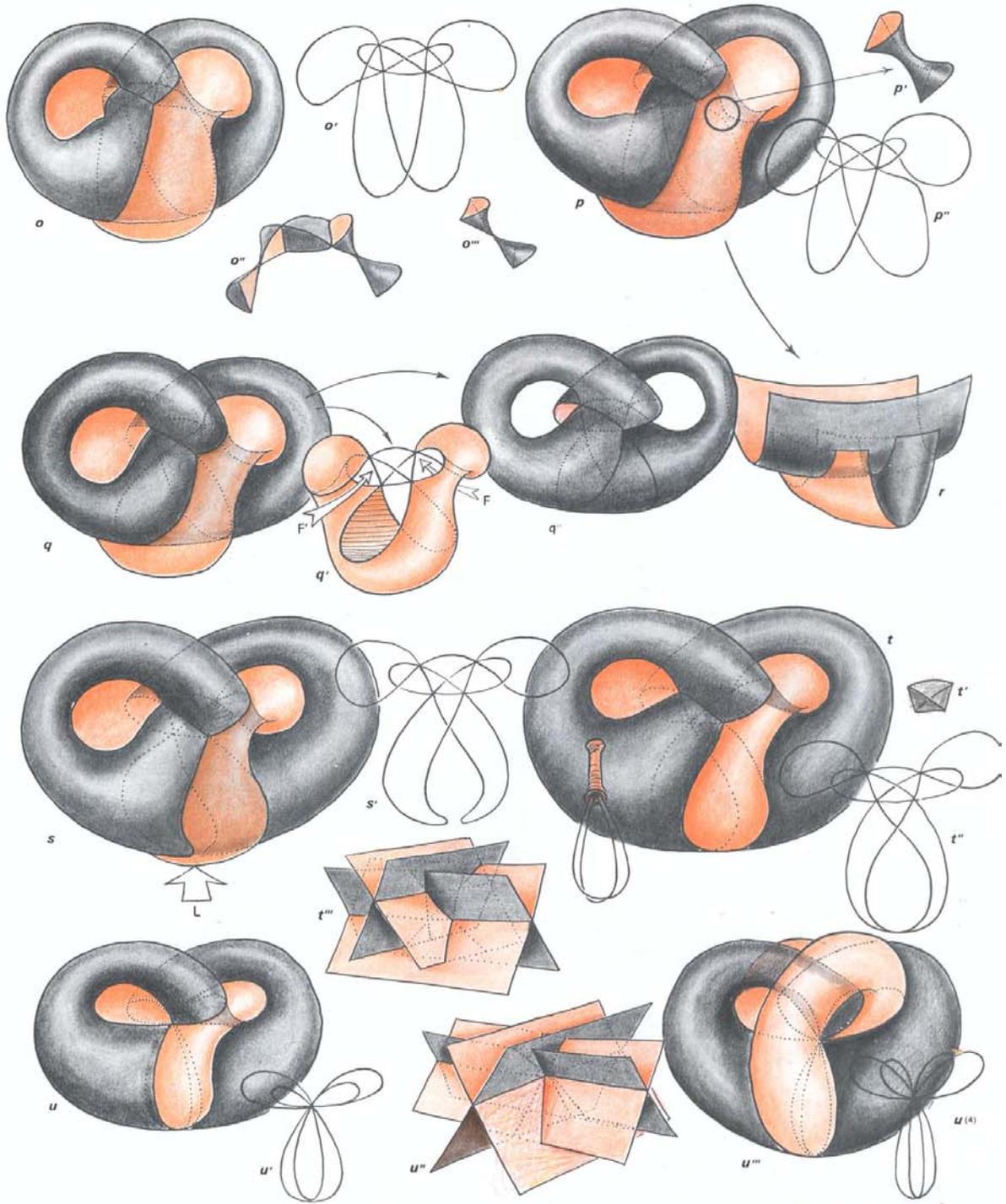
**5. LES MODIFICATIONS GÉNÉRIQUES** sont les étapes cruciales de la déformation où se produisent les changements de structure de la configuration. On peut suivre pas à pas le retournement de la sphère à partir de ces modifications. La première modification générique  $D_0$  apparaît lorsque deux surfaces se traversent comme la peau recouvrant un coude quand elle est plongée dans l'eau. La courbe de self-intersection est approximativement circulaire. La modification générique  $T^+$  apparaît quand une surface cylindrique s'approche de l'arête d'un dièdre. On peut se représenter les deux plans du dièdre comme les plans de coupe de deux scies qui entaillent le cylindre (ici une bûche) pour isoler un secteur de boule (en forme de tranche de mandarine). La modification générique  $D_1$  peut se concevoir comme la montée de l'eau dans un pantalon infini, en fait

une sorte de parabolôïde hyperbolique. Au voisinage de l'entre-jambe la courbe de self-intersection passe de deux arcs de cercles à une forme en X puis à deux nouveaux arcs raccordés différemment. Il est à remarquer que cette modification change les communications possibles entre les parties de l'espace. Lorsque le niveau de l'eau est bas la communication est impossible pour le poisson mais possible pour l'oiseau; quand le niveau de l'eau est haut le poisson peut passer d'une jambe à l'autre mais l'oiseau est confiné dans une région de l'espace. La modification générique suivante  $Q$  fait intervenir quatre plans dont l'un glisse par rapport aux trois autres; dans cette modification, le tétraèdre limité par les quatre plans se renverse. L'étude de ces modifications génériques nous arme pour retourner la sphère (voir figure 6).



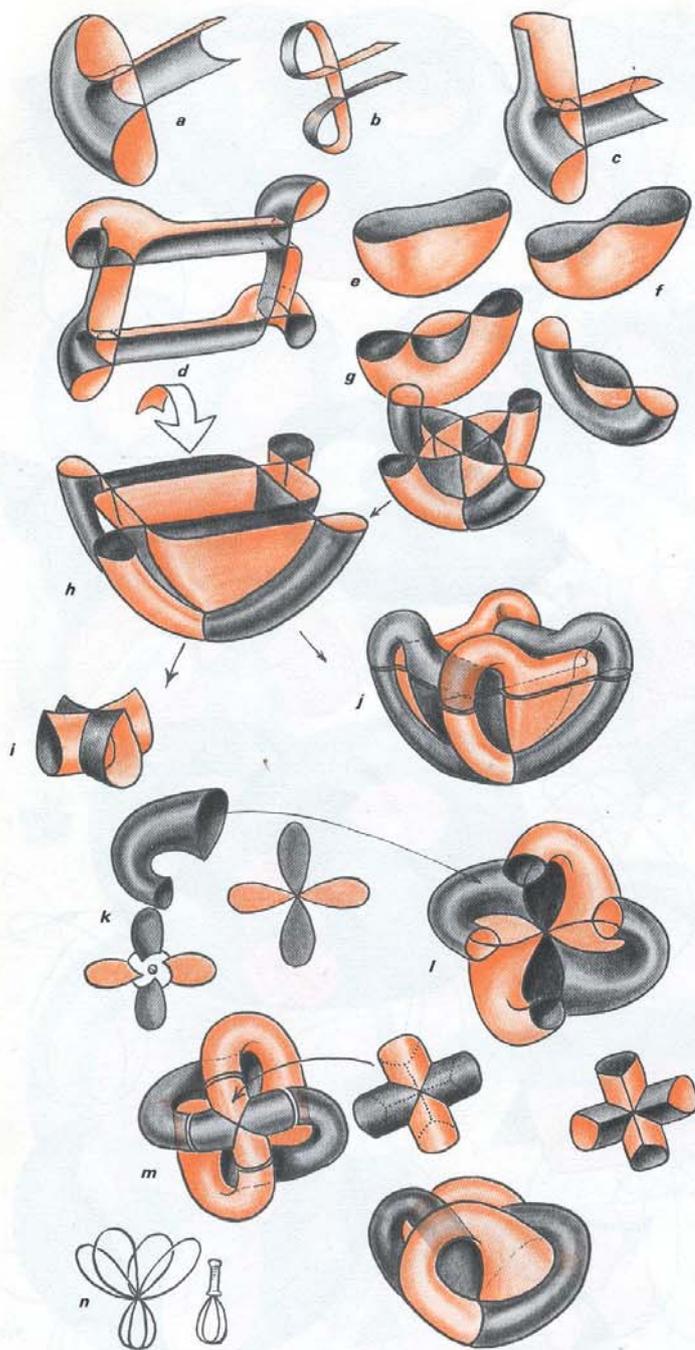
6. LE RETOURNEMENT DE LA SPHÈRE. Cette planche illustre les différentes étapes du retournement de la sphère. On part de la sphère *a* qui est transformée, par une modification générique  $D_0$ , pour former une lentille et un tube (*b, c, d*). Puis on replie la figure obtenue (*e*) pour faire s'interpénétrer deux parties du tube par une seconde modification générique  $D_0$  dont le résultat est *f*. En *g*, apparaît la courbe de self-intersection. Lorsque l'interpénétration d'un tube dans l'autre se poursuit au-delà de la courbe de self-intersection,

on a une modification générique  $T^+$ . Deux de ces modifications s'effectuent ici simultanément et la sphère prend la forme *h*; la partie où s'effectue la modification est représentée grandie en *i* et la ligne de self-intersection en *j*. On déforme ensuite le tube (*k*) pour lui donner une forme de paraboloïde hyperbolique (*k'*) ou de « pantalon » (*m*) et on fait monter un feuillet du lenticule (assimilable au plan d'eau de la figure 5c, à travers les deux « jambes » pour réaliser une transformation de type  $D_1$ . Le moment critique de cette modification est



représenté en  $o$  et les courbes de self-intersection en  $o'$ . Les courbes de self-intersection  $o'$  et  $o''$  annoncent la mise en communication des « tranches de mandarine » avec l'espace ambiant. En  $p$ , une des modifications  $D_1$  est achevée (celle de droite) et les passages sont visibles sur  $p'$  et  $p''$ . Sur les dessins  $q'$  et  $q''$ , on a représenté le modèle  $q$  en deux parties où les deux modifications  $D_1$  sont achevées. Les nouveaux passages ouverts sont symbolisés par les flèches  $F$  et  $F'$ . Les tranches de mandarine ont été mises en communication avec l'espace

ambiant. On examine maintenant la partie inférieure du modèle. Par une nouvelle modification générique  $D_1$  illustrée en  $s$ , le feuillet du tube monte selon la direction de la flèche  $L$  pour obtenir la forme en batteur à œufs des lignes de self-intersection. La dernière étape consiste à éliminer le tétraèdre du milieu représenté en  $t$  par une modification générique  $Q$  dans laquelle on pousse un plan jusqu'au point critique où les quatre sommets du tétraèdre se rassemblent en un point. On a le modèle central  $u'''$  du retournement détaillé sur la figure 7.

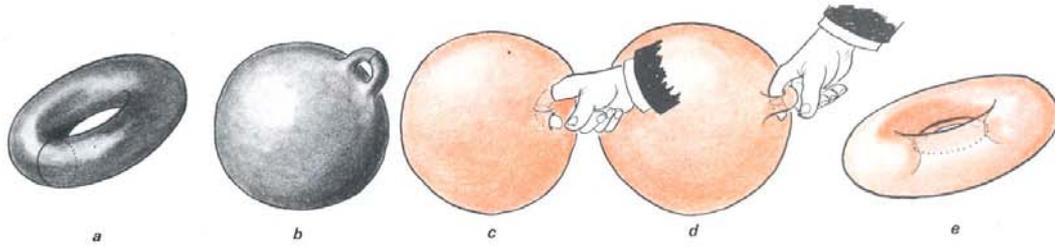


7. LE MODÈLE CENTRAL du retournement de la sphère est ici représenté en détail. Pour en concevoir la structure, on part d'un hémisphère (a) que l'on déforme (c) pour former l'une des quatre calottes de la partie supérieure d du modèle central; en e, f, g, on a indiqué une manière d'obtenir les deux tubes imbriqués qui constituent, après déformation, la base du modèle. Cette séparation en deux parties montre qu'on a bien affaire à une sphère car la partie supérieure est topologiquement équivalente à une bande cylindrique et la partie inférieure à deux calottes sphériques imbriquées. En k, on aperçoit une partie de la ligne de self-intersection en forme d'hélice quadripale et les quatre tubes qui se raccordent à la partie basse (i, l). Ces quatre tubes se raccordent selon deux courbes (n) symbolisées par les pales d'un batteur à œufs. En o, on a représenté une vue de côté du modèle central légèrement déformé par rapport à la figure j.

mation de Marcel Froissart symétrique par rapport au temps. Tout cela se passait sous l'œil toujours narquois de Raoul Bott; en manière de plaisanterie il alla jusqu'à prétendre que, puisque les modèles étaient si compliqués, il croyait décidément de moins en moins au théorème.

#### Immersion transversales et modifications génériques

Un outil théorique essentiel pour maîtriser l'information reçue de Marcel Froissart fut de baliser les diverses transformations envisagées en utilisant la technique des modifications génériques d'immersions transversales. (Nous tenons à préciser au lecteur que transversal ne signifie pas perpendiculaire.) Une immersion transversale est une immersion dans laquelle la surface ne présente que des lignes de points doubles le long desquelles les nappes ne sont jamais tangentes entre elles et un nombre fini de points triples en lesquels les trois plans tangents aux trois nappes forment un trièdre. Notons qu'un plongement est une immersion transversale d'où la courbe de self-intersection est absente. La surface de Boy est une immersion transversale; mais, dans la transformation d'Anthony Phillips, lorsqu'on échange entre eux les deux feuillettes de son revêtement par la sphère, il se produit un contact entre les deux nappes le long de toute la surface de Boy et cette situation n'est pas transversale. Comme on peut s'en persuader par exemple en comparant les figures 2b et 2c, lorsqu'on déforme une immersion transversale, la courbe de self-intersection évolue sans changer de structure. C'est le cas, en particulier, lorsqu'il s'agit d'une déformation de plongement. Si deux immersions transversales ont des courbes de self-intersection de structures différentes, il faut donc, pour passer de l'une à l'autre, accepter qu'au cours de la déformation l'immersion cesse d'être transversale. Reprenant une image hasardée lors de l'étude des plongements, on peut dire que sur le continent des immersions, les immersions transversales se groupent en une multitude de pays d'un seul tenant, tandis que les immersions non transversales se répartissent sur les frontières séparant les différents états. La façon la moins laxiste de nous octroyer la liberté indispensable pour retourner la sphère conduit à décrire les six types de modifications, dites génériques, que peut subir la courbe de self-intersection d'une surface immergée dans l'espace de dimension trois. Au prix d'une perturbation qu'on peut choisir arbitrairement petite, tout chemin d'immersions peut être corrigé de façon à éviter les modifications non génériques. Le premier type de modification générique, le type  $D_0$ , (voir figure 5), rend compte du mouvement de deux portions de surface à la rencontre l'une de l'autre en vue de se traverser. A l'instant critique, il y a contact en un point qui donne ensuite naissance à une courbe



8. UN RETOURNEMENT DU TORE découle simplement du retournement de la sphère. On part du tore (a) qu'on transforme en sphère munie d'une petite anse (b). On retourne la sphère (c) qui change de couleur (sa couleur interne apparaît) et la petite anse est

maintenant « à l'intérieur »; il suffit d'extraire (d) cette anse en y enfilant le doigt, pour obtenir un tore retourné. On remarquera que le cercle méridien en (a) se retrouve autour du doigt du personnage et devient le cercle de gorge du tore retourné.

de self-intersection. Au moment de la traversée des nappes, il se crée, dans l'espace ambiant, une nouvelle région en forme de demi-boucle ou de lentille. C'est la situation décrite dans les figures 2b et 2c où l'on croise les pôles de la sphère. La figure 5a ( $5a_1$  à  $5a_5$ ) représente la rencontre d'un parabololoïde de révolution avec un plan, bien illustré par l'image d'un coude venant éprouver la température du bain. Le même phénomène se produit lorsque deux sphères (extérieures ou intérieures l'une à l'autre) viennent à se rencontrer ou lorsque deux cylindres d'axes non parallèles sont animés d'un mouvement les amenant à se traverser. Le second type ( $D_2$ ) de modification générique décrit le mouvement de deux nappes croisées qui se séparent; c'est l'opération précédente, exécutée en renversant le sens du temps : le coude sort de l'eau, la région lenticulaire et la courbe de self-intersection disparaissent. Sur le chemin qui va nous conduire du plongement standard au modèle central, nous commencerons par rencontrer deux modifications de type  $D_0$  (voir figures 6c et 6f). Puisque le trajet qui va du modèle central à la sphère retournée se construit par symétrie à partir de ce chemin, la déformation passera en fin de parcours par deux modifications de type  $D_2$ .

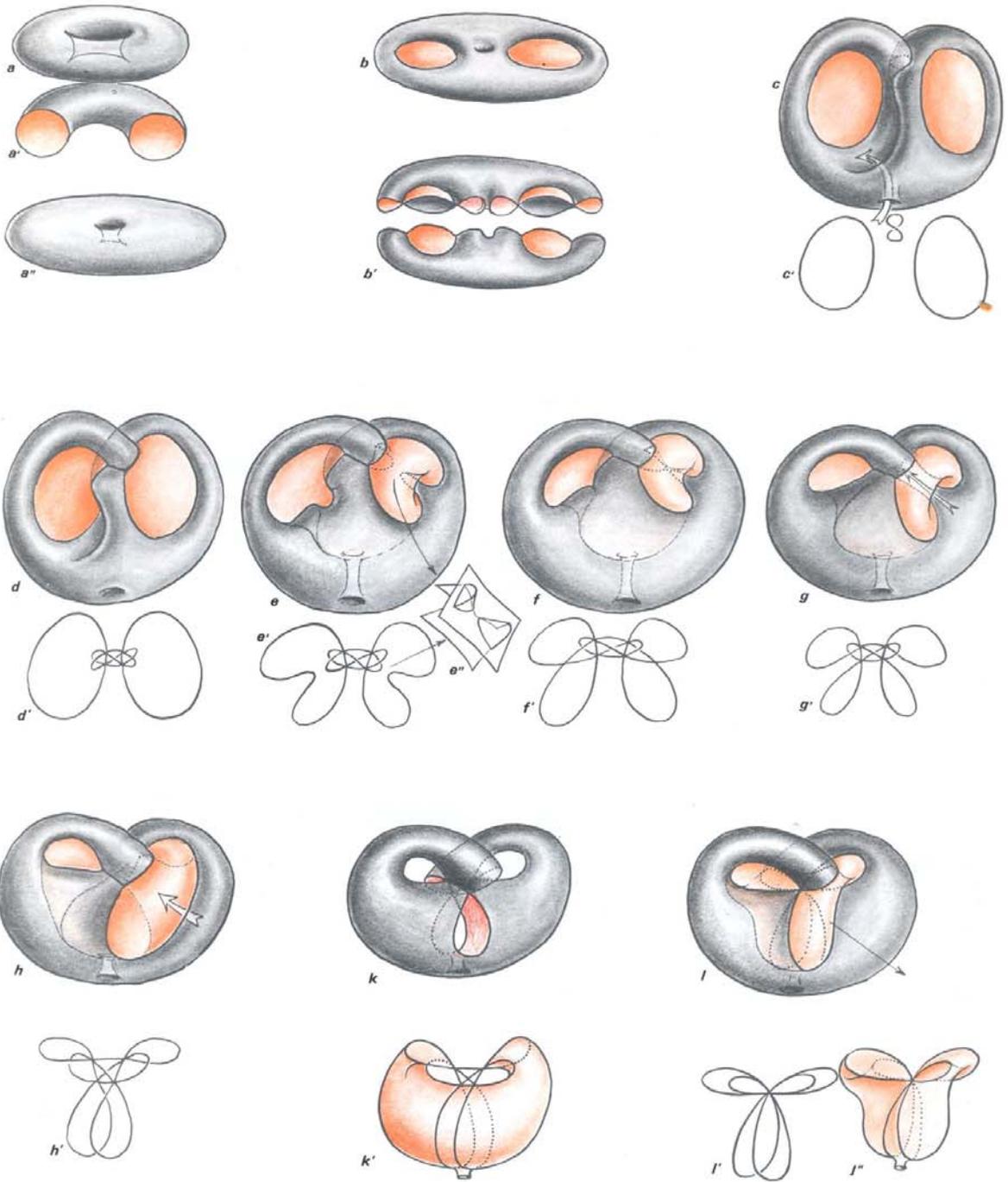
On est dans une situation de type  $T^+$  (voir figure 5b) lorsque trois, et non plus deux, portions de la surface sont en mouvement les unes par rapport aux autres. Imaginons la surface d'une bûche s'approchant des plans de coupe de deux scies non parallèles. Lorsque le cylindre délimitant la bûche dépasse la ligne d'intersection des plans de coupe, on voit se former un passage de section triangulaire tandis qu'apparaissent deux points triples reliés entre eux par trois arcs de courbes de self-intersection. Pendant que les deux points triples s'écartent l'un de l'autre, une nouvelle région de l'espace en forme de secteur de boule ou de tranche de mandarine se constitue entre les nappes de la surface en mouvement. La modification  $T^-$  est l'opération opposée. Elle fait disparaître le secteur de boule et les points triples tandis que le conduit triangulaire se rouvre. Ainsi, les points triples d'une immersion apparaissent et disparaissent par paires. Il s'ensuit que toute immersion transversale de la sphère présente nécessairement un

nombre pair de points triples. De même l'immersion d'une surface n'ayant qu'un point triple (comme par exemple l'immersion de Boy) ne peut se déformer en un plongement de cette surface. Après les deux contacts de type  $D_0$  mentionnés précédemment, notre retournement passe par deux modifications de type  $T^+$  auxquels correspondent deux  $T^-$  dans la deuxième phase du mouvement.

Une modification de type  $D_1$  change le mode de raccordement de deux portions de la courbe de self-intersection d'une immersion, après avoir amené en contact deux nappes qui se traversent. Pour expliquer le phénomène, représentons l'une des nappes de la surface par un col de montagne (ou parabololoïde hyperbolique), l'autre étant figurée par un plan mobile, par exemple la surface libre d'un liquide qui inonde progressivement le paysage. Tant que l'inondation n'a pas atteint le col, la courbe de self-intersection se compose de deux arcs de courbe (les deux branches d'une hyperbole). Elle dégénère en deux droites (les asymptotes de l'hyperbole) lorsque l'eau atteint le niveau du col, pour se distribuer de nouveau en deux arcs de courbe (branches de l'hyperbole conjuguée), une fois le col inondé. Lors du contact, c'est-à-dire lorsque le liquide se trouve au niveau du col, l'espace ambiant est découpé en six régions. Mais avant comme après cet instant critique, deux de ces six régions sont raccordées entre elles par un passage. Pour bien comprendre comment s'effectuent les raccordements, il convient de ne pas perdre de vue le fait qu'en réalité, notre montagne est creuse. En effet, si nous nous plaçons sous la surface de celle-ci, nous assistons au même spectacle mais cette fois-ci du point de vue d'un spéléologue qui suit une rivière souterraine en crue. Il percevra en effet le col comme un siphon qu'il devra se hâter de traverser avant que l'eau ne lui ait barré le passage. A partir du moment où sa route est coupée, un poisson de la mer extérieure qui, avant cet instant critique, percevait le col comme un isthme infranchissable, constate que s'ouvre, pour lui, un détroit qu'il peut désormais traverser librement. Sur les figures 5c on a préféré à l'image du col de montagne celui de l'entrejambe d'un pantalon. Naturellement, la surface du liquide n'a aucune raison d'être plane.

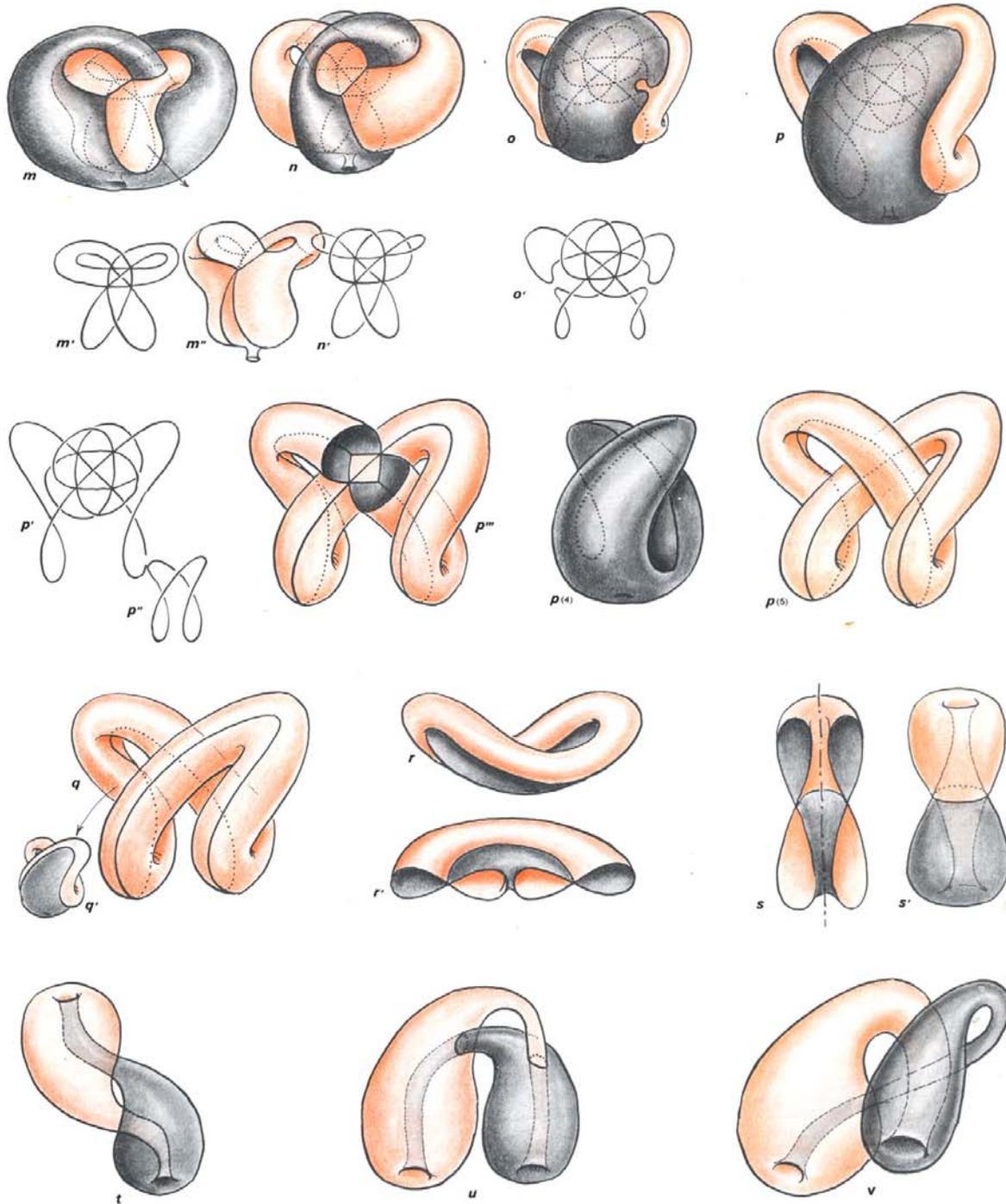
Le modèle central de notre déformation présente un contact de type  $D_1$  (voir figure 7s). En renversant le cours du temps d'une modification de type  $D_1$  on obtient encore une modification de type  $D_1$  : mais alors les points de vue du poisson et du spéléologue sont échangés. Après les deux  $D_0$  et les deux  $T^+$  déjà signalés, il nous faudra rencontrer deux modifications de type  $D_1$  avant d'amener la sphère dans la position du modèle central (voir figures 1 à q). Ainsi, lorsque nous nous rendons du modèle central au plongement antipodal, nous rencontrerons successivement deux  $D_1$ , deux  $T^-$  et deux  $D_2$ .

Le dernier des six types de modifications génériques, noté  $Q$ , met en jeu quatre nappes d'une surface, qui, à l'instant critique de la modification, passent toutes par un même point (point quadruple). Pour expliquer ce qui se produit dans ce cas, assimilons les quatre nappes aux plans déterminés par les quatre faces d'un tétraèdre régulier et supposons que trois de ces plans soient fixes, tandis que le quatrième se déplace parallèlement à lui-même. Au cours du mouvement, le plan mobile se rapproche du sommet déterminé par les trois autres. Le point quadruple apparaît au moment où le plan mobile rencontre ce sommet. Par ce point passent alors six droites qui constituent la courbe de self-intersection du système. L'espace ambiant est alors découpé en quatorze régions. Après la rencontre, les quatre plans délimitent un nouveau tétraèdre qui se déduit du précédent par symétrie : ainsi la modification a pour effet de renverser le tétraèdre. On peut encore présenter cette modification en solidarissant les plans par paires et en déplaçant les dièdres ainsi formés l'un par rapport à l'autre, comme indiqué sur les figures 5d. Comme celles de type  $D_1$ , les modifications de type  $Q$  sont symétriques par rapport au temps. Le passage de l'homotopie régulière du retournement de la sphère par le modèle central, présente deux modifications de types  $D_1$  et  $Q$ . Tout retournement de la sphère passe nécessairement par au moins un point quadruple. C'est probablement l'une des raisons pour lesquelles la mise au point du scénario a été si laborieuse. Au total, le retournement comporte quatorze modifications génériques : c'est un minimum.



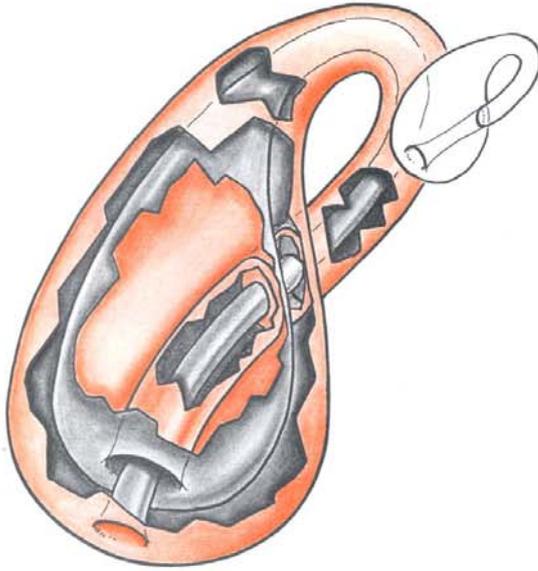
9. UN DES RETOURNEMENTS DU TORE peut se faire à travers un revêtement à deux feuilletts de la bouteille de Klein et ce retournement conserve le cercle de gorge. On aplatit le tore et on contracte son col au centre puis on réalise deux modifications génériques  $D_0$ . La suite des dessins présente une grande analogie avec les transformations du retournement de la sphère. En masquant le bas de chaque figure, les parties supérieures sont les mêmes que celles du

retournement de la sphère. Il n'y a pas de différence de structure entre les modèles  $m$  et  $n$ ; on les a déformés pour une meilleure représentation graphique : les courbes de self-intersection  $m'$  et  $n'$  sont identiques. On déforme la partie frontale du modèle tel qu'indiqué en (o) par deux  $D_1$  qui vont reconstituer des tranches de mandarine pour donner la figure dont la ligne de self-intersection est identique (mais vue de côté) à celle obtenue en  $k$  sur la figure du retournement de la

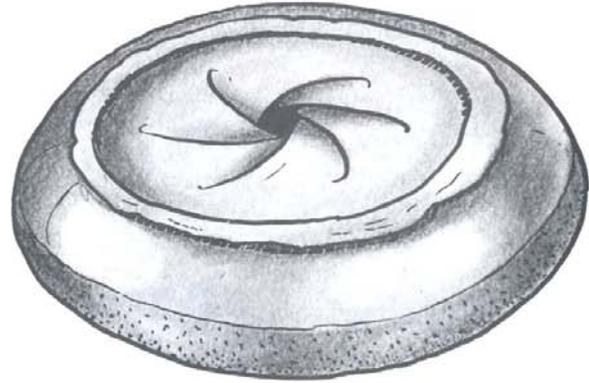


sphère. On a représenté en  $p^{(3)}$ ,  $p^{(4)}$ ,  $p^{(5)}$  la façon dont la lentille et le tube étaient transformés. En décroissant le tube par des modifications génériques  $T-T'$  et  $D_2$  (transformation inverse de celle conduisant à la figure  $k$  dans le retournement de la sphère), on obtient le modèle  $rr'$  analogue au modèle  $e$  du retournement de la sphère avec en plus un passage tubulaire au centre. Si on ne tient pas compte du passage tubulaire, on a, par ces transformations, un retournement non

symétrique de la sphère. Par rotation de  $90^\circ$  des figures en huit du modèle  $r$ , on passe aux modèles  $s$  et  $s'$ . Ce modèle  $s$  est central et on pourrait échanger les deux parties par rotation de  $180^\circ$  et réaliser la suite d'opérations inverses pour obtenir le tore retourné. La suite des dessins  $t$ ,  $u$ ,  $v$  montre qu'on passe au revêtement à deux feuillets de la bouteille de Klein, comparable au double revêtement de la surface de Boy.



10. UNE BOUTEILLE DE KLEIN est ici revêtue par une surface à deux feuilletts. La surface de revêtement est ici un tore (voir figure 9). Si on colle les faces en regard des deux feuilletts, on retrouve la bouteille de Klein (en médaillon) qui est une surface unilatère.



11. CETTE BLAGUE A TABAC montre comment il faudrait commencer par tordre la sphère pour la retourner selon une suite de modèles présentant un axe de symétrie d'ordre 6. Elle correspond au modèle  $e$  de la figure 6 qui a un axe de symétrie d'ordre 2.

### Le retournement de la sphère.

Quelques mois après la rencontre de Seattle, nous étions en mesure de proposer deux variantes de la déformation de Marcel Froissart. La première a été réalisée par Charles Pugh sous forme de huit modèles en grillage (matériau, nous l'avons déjà dit, spécialement bien adapté à la représentation des immersions) qui ont servi de point de départ à Nelson Max pour donner à l'ordinateur les instructions nécessaires à la reproduction de toutes les étapes transitoires. Le fruit de cette collaboration a permis à Nelson Max de diffuser en 1976, un film pédagogique fort instructif; grâce au magnétoscope, la seconde a fait l'objet, en 1972, d'une animation vidéo (malheureusement non publiée en son temps) réalisée par Georges Ricco sur nos indications.

C'est la seconde variante que nous allons présenter. Bien que conduisant au résultat de façon plus directe et plus élégante, elle semblait de prime abord assez délicate à expliquer. En effet, pour rendre compte d'une déformation, une suite de modèles ne doit pas se contenter d'être correcte. Les maquettes qui la composent doivent encore satisfaire à un principe d'économie et obéir à des règles de cohérence esthétique qui en facilitent la perception. Lorsque le principe de la déformation nous est apparu clairement, il devenait évident qu'on pouvait mettre le mouvement en équations. On peut faire en sorte qu'à tout instant de la déformation les modèles présentent un axe de symétrie binaire. Le procédé qui les engendre se généralise et permet de construire une transformation, elle aussi symétrique par rapport

au temps et susceptible d'une représentation analytique, dans laquelle chaque immersion admet un axe de symétrie d'ordre, donné d'avance, aussi grand qu'on veut. Dans le cas général, l'amorce du mouvement est suggérée par la figure 11 qui possède un axe de symétrie d'ordre six et qui représente un modèle de blague à tabac en vente chez tous les buralistes : il s'agit d'une poche en caoutchouc dont le col se referme grâce à douze fronces dont six apparaissent à la face supérieure. Il est facile de prolonger la figure en un plongement de la sphère en cousant le long du bord une calotte sphérique cachant le fond du sac. Une blague à quatre fronces fournirait l'amorce de la déformation de la figure 7. Si on s'impose une symétrie ternaire, l'étape centrale de la déformation se trouve être, comme chez Anthony Phillips, le revêtement à deux feuilletts de la surface de Boy qu'on peut, par conséquent, décrire au moyen d'expressions algébriques. En pratiquant des fenêtres dans la blague à tabac, George Francis, que nous remercions au passage d'avoir, l'été dernier, éprouvé sur ordinateur l'efficacité visuelle des équations, a trouvé le moyen d'expliquer le mouvement par un très petit nombre de dessins qui, il est vrai, demandent au lecteur un certain effort de reconstitution.

On pourra suivre toutes les étapes du retournement de la sphère sur les dessins de la figure 6. Les figures 6a, 6b et 6c nous montrent une première modification de type  $D_0$  qui, en croisant le pôle nord et le pôle sud, donne naissance à une lentille entourée d'un tube équatorial. Par conséquent, l'immersion  $c$  découpe l'espace en trois régions. Sur les figures 6d et 6e, on tord le modèle.

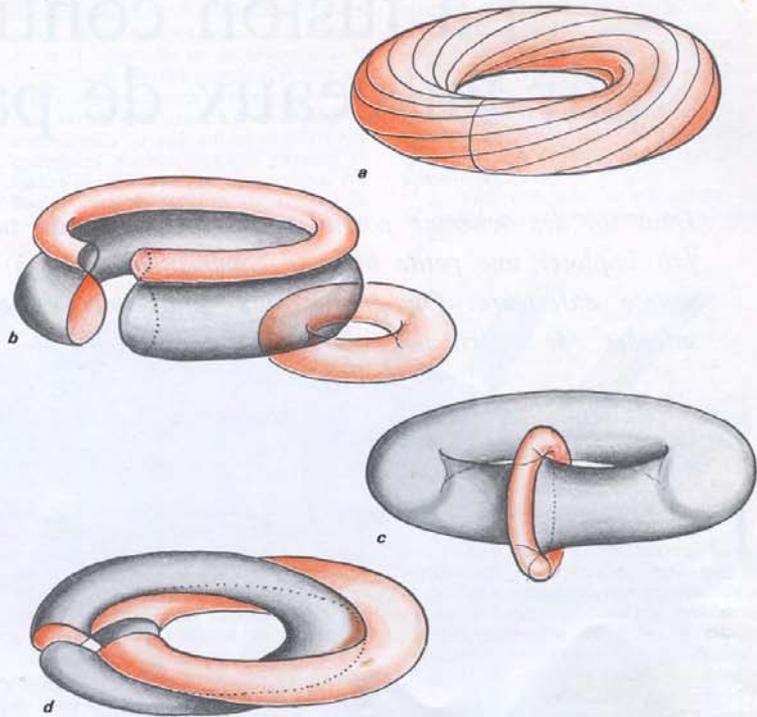
Après une seconde modification de type  $D_0$  on est dans la situation de la figure  $f$  où le tube équatorial se recoupe tandis qu'apparaît une quatrième région de l'espace ambiant. Sur la figure  $g$  on voit les deux courbes fermées dont la réunion est la courbe de self-intersection du modèle. Le mouvement d'interpénétration des deux portions de tube se poursuit jusqu'au moment où deux points de l'équateur atteignent simultanément le bord anguleux de la lentille. Il se produit alors deux modifications de type  $T^+$  (voir figures  $h$ ,  $i$  et  $j$ ). Les quatre points triples auxquels ces modifications donnent naissance sont les quatre sommets d'une région de l'espace en forme de tétraèdre. Sur deux arêtes opposées du tétraèdre viennent s'articuler deux régions de l'espace en forme de secteur de boule tandis que le reste du tube équatorial se scinde en deux régions; l'immersion  $j$  découpe donc l'espace en sept régions. Les figures  $k$ ,  $k'$ ,  $l$  et  $l'$  préparent les deux modifications suivantes qui sont de type  $D_1$ . Sur la figure  $m$ , le pantalon qui nous a servi à décrire la modification de type  $D_1$ , est orienté de manière à correspondre à la figure  $k$ . Dans la figure  $n$ , la position du pantalon correspond à la situation de la figure  $o$ . Les deux modifications de type  $D_1$ , qui peuvent se produire simultanément, ont pour effet d'ouvrir vers l'extérieur les secteurs de boule qui épaulent le tétraèdre, tandis que se ferment les deux passages qui, dans la situation de la figure  $j$  mettaient la partie centrale du modèle en communication avec l'extérieur. En  $o'''$  on a réalisé une seule des deux modifications. La figure  $q$  décrit la situation lorsque les deux modifications de type  $D_1$  sont réalisées; elle découpe l'espace en six régions.

Les figures  $q'$  et  $q''$  représentent un démontage du modèle  $q$  en deux éléments sur lesquels on a cherché à mettre en évidence les passages ouverts. La partie inférieure du modèle correspond au schéma  $r$ , c'est-à-dire au croisement de deux cylindres paraboliques. Le mouvement de ces deux cylindres l'un par rapport à l'autre, suggéré par la figure  $s$ , produit un contact de type  $D_1$  qui sépare en deux ce qui reste de la région lenticulaire de la figure  $c$ . Une modification de type  $Q$  fait disparaître le tétraèdre et conduit au modèle central qui découpe donc l'espace en six régions et que la figure  $u'''$  représente, légèrement déformé. Après une rotation de  $90^\circ$ , les modifications précédentes appliquées dans l'ordre inverse, nous amènent à la sphère retournée.

### Les immersions du tore.

Au cours du mouvement, le pôle nord et le pôle sud se croisent trois fois : lors du premier contact  $D_0$ , lors du passage par le modèle central (contact de type  $D_1$ ) et lors du dernier  $D_2$ . Quitte à perdre la propriété de symétrie par rapport au temps, on peut faire en sorte que le pôle nord ne croise le pôle sud qu'au moment du dernier  $D_2$ . Pour cela, il suffit de faire apparaître au début du processus non plus une mais deux lentilles : dès lors, la modification de type  $D_1$  qui survenait au cours de l'étape centrale n'a plus à se produire. Dans la déformation de la figure 6, les quatorze modifications rencontrées étaient respectivement de types  $(D_0)-(D_0)$ ,  $(T^+)-(T^+)$ ,  $(D_1)-(D_1)$ ,  $(Q)-(D_1)-(D_1)-(D_1)$ ,  $(T^-)-(T^-)$ ,  $(D_2)-(D_2)$ . (Les traits d'union indiquant que les modifications peuvent se produire simultanément.) Dans la variante envisagée, on a la succession  $(D_0)-(D_0)-(D_0)$ ,  $(T^+)-(T^+)$ ,  $(D_1)-(D_1)-(Q)-(D_1)-(D_1)$ ,  $(T^-)-(T^-)$ ,  $(D_2)-(D_2)$ . Si l'on arrête le processus après la treizième modification, le modèle se présente comme une lentille grise entourée d'un tube orangé. On peut faire en sorte que le pôle nord et le pôle sud soient restés immobiles jusqu'à ce moment. Si on découpe autour de chacun des pôles une petite calotte et si on raccorde les bords des trous ainsi formés au moyen d'un cylindre, la sphère devient un tore et les déformations envisagées ont pour résultat de faire apparaître un tube orangé sur l'extérieur d'un tore gris, c'est ce que représentent les dessins des figures  $9a$  à  $9q$ . Un procédé analogue permettrait de relier le plongement standard du tore à une immersion affectant la forme de la figure 12c.

La question des plongements et des immersions est beaucoup plus compliquée pour le tore que pour la sphère. Maurice Hirsch a généralisé le théorème de Stephen Smale, qui traitait des immersions d'une sphère de dimension quelconque, au cas des surfaces de dimension arbitraire. Appliquant ces résultats aux surfaces de l'espace à trois dimensions, Ioan James et Emery Thomas ont montré en particulier que les immersions du



12. LES FORMES LES PLUS REMARQUABLES d'immersions du tore sont représentées en  $b$ ,  $c$  et  $d$ . Le plongement « tordu » de la figure  $a$  qui a le même aspect que le plongement standard montre que les figures  $b$ ,  $c$  et  $d$  ne contiennent pas toute l'information qu'il faudrait avoir pour décrire les immersions puisque ces figures ne rendent pas compte des torsions internes.

tore se répartissaient sur quatre continents entre lesquels il est impossible de passer par homotopie régulière. L'un de ces continents ne contient aucun plongement. Sur la figure 11d, on a représenté une immersion de ce continent. Les trois autres continents contiennent des plongements qui se répartissent sur une infinité de taches grises ou orangées selon la couleur de la face visible de l'objet. La figure 11a donne l'idée d'un plongement du tore qui présente, tout comme le plongement standard, sa face orangée vers l'extérieur mais qui ne peut être relié à ce dernier par aucune homotopie régulière. La baudruche d'un tel plongement a subi une torsion de  $360^\circ$  qu'il est impossible de faire disparaître. Ce plongement et le plongement standard appartiennent donc à des continents différents. Cet exemple montre pourquoi les dessins de la figure 12, qui représentent les formes que peuvent revêtir certaines immersions du tore, ne contiennent pas toute l'information dont on a besoin pour dire à quel continent appartient l'immersion représentée. Sur un continent donné de l'univers des immersions du tore, une homotopie régulière raccordant un point d'une tache grise à un point d'une tache orangée est un retournement du tore. Comme on le voit par ce qui précède, il y a une infinité de manières de retourner le tore.

Sur les figures  $9s$  à  $9v$ , on indique comment le tore gris et orangé peut être déformé en un revêtement à deux feuillets de la bouteille de Klein (immersion d'une surface qu'on obtient en raccordant entre eux deux rubans de Möbius). On peut alors permuter les feuillets du revêtement et aboutir, en parcourant en sens inverse la déformation précédente, à un tore retourné. Partant du tore standard, la figure 8 suggère un retournement du tore aboutissant à un objet orangé qui ne peut être raccordé par déformation de plongement au tore orangé obtenu en traversant la bouteille de Klein.

Les mathématiciens sont fréquemment irrités lorsqu'on leur demande à quoi servent leurs découvertes. En effet, le besoin qui les pousse à chercher est plutôt d'ordre esthétique que pragmatique. La question est d'autant plus embarrassante quand on la pose à propos du présent travail qui n'est pas, à proprement parler, un travail de mathématique; dans ce qui précède on n'a rien démontré mais seulement illustré une démonstration qui existait déjà. Nous pensons toutefois que tous ceux qui voudront chercher à comprendre le retournement de la sphère acquerront, en pratiquant l'exercice, une vision nouvelle de l'espace qui enrichira leur imagination. ■